2024~2025学年湖北仙桃市仙桃市田家炳实验高级中学高二上学期期中数学试卷（11月）

一、单选题

难度

1. 直线l的方程为$\sqrt{3}x-y+1=0$，则l的倾斜角是（　）

A. 90°

B. 60°

C. 45°

D. 30°

难度

2. 一个盒子中装有5个大小相同的小球，其中3个红球，2个白球.若从中任取两个球，则恰有一个红球的概率为（　　）

A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{1}{3}$

难度

3. 圆$x^2+y^2-2x+6y=0$的圆心到$x-y+2=0$的距离为（　　）.

A. $\sqrt{2}$

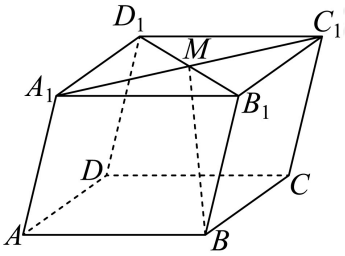
B. 2

C. 3

D. $3\sqrt{2}$

难度

4. 如图所示，在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M为A_1C_1与B_1D_1的交点，若$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，则$\overrightarrow{BM}$等于（　）



A.

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}-\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$$

B.

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$$

C.

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{a}-\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$$

D.

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$$

难度

5. 两平行直线$3x-4y-12=0$和$6x-8y+5=0$之间的距离为（　　）

A. $\frac{29}{10}$

B. $\frac{29}{5}$

C. $\frac{17}{5}$

D. $\frac{17}{10}$

难度

6. 直线$l_1:ax+y-1=0, l_2:(a-2)x-ay+1=0$，则“$a=-2$”是“$l_1//l_2$”的（　　）条件

A. 必要不充分

B. 充分不必要

C. 充要

D. 既不充分也不必要

二、未知

难度

7. 在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle BCA=90^\circ$，D_1,F_1分别是A_1B_1,A_1C_1的中点，$BC=CA=CC_1$，则BD_1与AF_1所成角的余弦值是（　）

A. $\frac{\sqrt{30}}{10}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{30}}{15}$

D. $\frac{\sqrt{15}}{10}$

三、单选题

难度

8. 已知点$P(0,2)$关于直线$x-y+1=0$对称的点Q在圆C：$x^2+y^2+2x+m=0$外，则实数m的取值范围是（　）

A. $m>-4$

B. $m<1$

C. $-4<m<1$

D. $m<-4$或$m>1$

四、多选题

难度

9. 已知事件A,B发生的概率分别为$P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{1}{3}$，则下列说法正确的是（　）

A. 若A与B互斥，则$P(A+B)=\frac{2}{3}$

B. 若A与B相互独立，则$P(A+B)=\frac{2}{3}$

C. 若$P\left(A\overline{B}\right)=\frac{1}{3}$，则$A$与$B$相互独立

D. 若B发生时A一定发生，则$P(AB)=\frac{1}{6}$

难度

10. 已知直线l：$\sqrt{3}x-y+1=0$，则下列结论正确的是（　）

A. 直线l的一个法向量为$(\sqrt{3},1)$

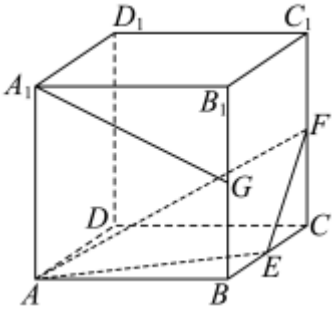
B. 若直线m：$x-\sqrt{3}y+1=0$，则$l\perp m$

C. 点$(\sqrt{3},0)$到直线l的距离是2

D. 过$(2\sqrt{3},2)$与直线l平行的直线方程是$\sqrt{3}x-y-4=0$

难度 ★★★☆☆

11. 如图所示，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，E、F、G分别为BC、CC_1、BB_1的中点，则下列说法正确的是（　　）



A. 直线A_1G与直线D_1D所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. 点D_1到AF距离为$\frac{3}{2}$

C. 直线A_1G与平面AEF平行

D. 三棱锥A_1-AEF的体积为$\frac{1}{12}$

五、填空题

难度 ★★★☆☆

12. 已知$\vec{a}=(2,2,1)$，$\vec{b}=(1,-1,\sqrt{2})$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$____.

难度 ★★★☆☆

13. 若直线$x+(1+m)y+m-2=0$与直线$mx+2y+8=0$垂直，则$m=$____

难度 ★★★☆☆

14. 在棱长为4的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E，F分别为棱DA，BB_1的中点，M，N分别为线段D_1A_1，A_1B_1上的动点（不包括端点），且$EN\perp FM$，则线段MN的长

度的最小值为 _____ .

六、解答题

难度

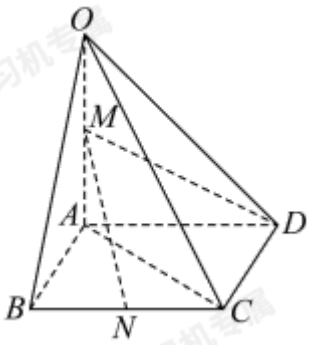
15. 为弘扬宪法精神，某校举行宪法知识竞赛．在初赛中，已知甲同学晋级的概率为$\frac{2}{3}$，乙同学晋级的概率为$\frac{1}{2}$，甲、乙两人是否晋级互不影响.

（1） 求甲、乙两人同时晋级的概率；

（2） 求甲、乙两人中至少有一人晋级的概率.

难度

16. 如图，在四棱锥$O-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为2的正方形，OA⊥底面$ABCD$，$OA=2$，M为OA的中点，N为BC的中点，解答以下问题：

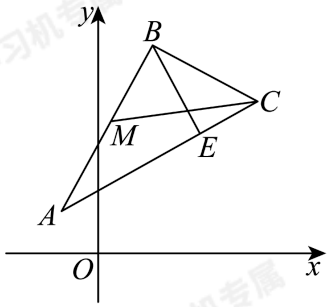


（1） 证明：直线$MN//$平面OCD；

（2） 求点N到平面OCD的距离．

难度

17. 在△ ABC中，$A(-1,2)$，边AC上的高BE所在的直线方程为$7x+4y-46=0$，边AB上中线CM所在的直线方程为$2x-11y+54=0$.

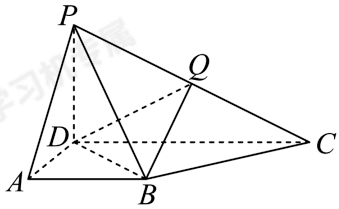


（1） 求点C坐标；

（2） 在线段AC上是否存在一点F，使得$BC=BF$？若存在，求出点F的坐标；若不存在，请说明理由.

难度

18. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$AB\perp AD, CD\perp AD, AB=AD=PD=\frac{1}{2}CD=1, PA=\sqrt{2}$，$PC=\sqrt{5}$，点$Q$为棱$PC$上一点.



（1） 证明：PD ⊥平面$ABCD$；

（2） 当点Q为棱PC的中点时，求直线PB与平面BDQ所成角的正弦值；

（3） 当二面角$P-BD-Q$的余弦值为$\frac{3\sqrt{11}}{11}$时，求$\frac{PQ}{PC}$.

难度 | ★★★☆☆

19. △ ABC的三个顶点分别是$A(4,0)$，$B(0,2)$，$C(3,1)$.

（1） 求边AB上的中线所在直线l_1的方程，求边AB上的高所在直线l_2的方程；

（2）

① 求△ ABC的外接圆G（G为圆心）的标准方程；

② 若点P的坐标是$(6,0)$，点Q是圆G上的一个动点，点M满足$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$，求点$M$的轨迹方程，并说明轨迹的形状.

2024~2025学年湖北仙桃市仙桃市田家炳实验高级中学高二上学期期中数学试卷（11月）【答案解析】

一、单选题

难度

1. 【答案】B

【解析】【分析】根据直线的斜率即可求解.

【详解】$\sqrt{3}x-y+1=0$的斜率为$\sqrt{3}$，故倾斜角为60°，

故选：B

难度

2. 【答案】A

【解析】

【分析】

根据古典概型概率公式求解.

【详解】

根据题意，任取两球恰有一个红球的概率为$P=\dfrac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_5^2}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$.

故选：A.

难度

3. 【答案】D

【解析】由题意得$x^2+y^2-2x+6y=0$，即$(x-1)^2+(y+3)^2=10$，

则其圆心坐标为$(1,-3)$，

则圆心到直线$x-y+2=0$的距离为$\dfrac{|1+3+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$.

故选：D.

难度

4. 【答案】B

【解析】【分析】根据空间向量的运算法则，化简得到$\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1A}$，即可求解.

【详解】由题意，根据空间向量的运算法则，可得

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1D_1}=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

.

故选：B.

难度

5. 【答案】A

【解析】

【分析】

利用两条平行线之间的距离公式即可求解.

【详解】

将直线$3x-4y-12=0$变形为$6x-8y-24=0$，

所以两平行线间的距离为$d=\frac{|-24-5|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{29}{10}$.

故选：A.

难度

6. 【答案】C

【解析】若$l_1//l_2$，则$a\times(-a)=1\times(a-2)$，$a^2+a-2=0$，

解得$a=1$或$a=-2$，

当$a=1$时，l_1和l_2的方程都是$x+y-1=0$，两直线重合，与题意不相符.

经验证可知，$a=-2$符合.

所以“$a=-2$”是“$l_1//l_2$”的充要条件.

因此正确答案为：C

二、未知

难度

7. 【答案】A

【解析】

【分析】

建立空间直角坐标系，求直线BD_1与AF_1的方向向量，利用向量夹角公式求夹角；

【详解】

以点C为原点，以$\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CC_1}$为$x,y,z$轴的正方向建立空间直角坐标系，

设$BC=CA=CC_1=2$，则$A\left(0,2,0\right)$，$A_1\left(0,2,2\right)$，$B\left(2,0,0\right)$，

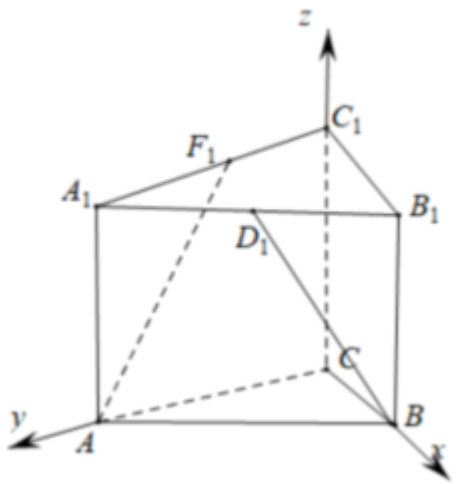
$B_1\left(2,0,2\right)$，$D_1\left(1,1,2\right)$，

$C_1\left(0,0,2\right)$，$F_1\left(0,1,2\right)$，所以$\overrightarrow{BD_1}=(-1,1,2)$，$\overrightarrow{AF_1}=(0,-1,2)$，

所以

$$\cos\left\langle \overrightarrow{AF_1},\overrightarrow{BD_1}\right\rangle =\frac{\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{BD_1}}{\left|\overrightarrow{AF_1}\right|\left|\overrightarrow{BD_1}\right|}=\frac{-1\times1+2\times2}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{10},$$

故选：A.



三、单选题

难度

8. 【答案】C

【解析】设点$P\left(0,2\right)$关于直线$x-y+1=0$对称的点$Q\left(a,b\right)$，

则$\begin{cases}\frac{b-2}{a-0}=-1\\ \frac{a+0}{2}-\frac{b+2}{2}+1=0\end{cases}$，解得$a=1,b=1$.

因为$Q\left(1,1\right)$在C外，所以$1+1+2+m>0$，

可得$m>-4$且$x^2+y^2+2x+m=0$表示圆可得$4+0-4m>0$，

即得$m<1$综上可得$-4<m<1$.

故选：C.

四、多选题

难度

9. 【答案】BC

【解析】

【分析】

选项A，利用互斥事件的概率公式，即可求解；选项B，利用$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，求得$P(A+B)=\frac{2}{3}$，即可求解；选项C，利用相互独立的判断方法$P(A)P(\overline{B})=P(A\overline{B})$，即可求解；选项D，由题知$P(AB)=P(B)$，即可求解.

【详解】

对于选项A，因为A与B互斥，则$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$，所以选项A错误，

对于选项B，A与B相互独立，则$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，所以选项B正确，

对于选项C，因为$P(A)=\frac{1}{2},P(\overline{B})=\frac{2}{3}$，所以$P(A)P(\overline{B})=\frac{1}{3}=P(A\overline{B})$，由相互独立的定义知$A$与$B$相互独立，所以选项C正确，

对于选项D，因为B发生时A一定发生，所以$B\subseteq A$，则$P(AB)=P(B)=\frac{1}{3}$，所以选项D错误，

故选：BC.

难度

10. 【答案】CD

【解析】

【分析】

对于A：根据直线方向向量与斜率之间的关系分析判断；对于B：根据直线垂直分析

判断；对于C：根据点到直线的距离公式运算求解；对于D：根据直线平行分析求解.

【详解】

对于A，因为直线l：$\sqrt{3}x-y+1=0$的斜率$k=\sqrt{3}$，

但$\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}=1\neq-1$，可知$\left(\sqrt{3},1\right)$不为直线$l$的一个法向量，故A错误；

对于B，因为直线m：$x-\sqrt{3}y+1=0$的斜率$k'=\frac{\sqrt{3}}{3}$，且$kk'=1\neq-1$，

所以直线l与直线m不垂直，故B错误；

对于C，点$\left(\sqrt{3},0\right)$到直线l的距离$d=\frac{\left|\sqrt{3}\times\sqrt{3}-0+1\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(-1\right)^2}}=2$，故C正确；

对于D，过$\left(2\sqrt{3},2\right)$与直线l平行的直线方程是$y-2=\sqrt{3}\left(x-2\sqrt{3}\right)$，即$\sqrt{3}x-y-4=0$，故D正确.

故选：CD.

难度 ★★★☆☆

11. 【答案】ACD

【解析】

【分析】

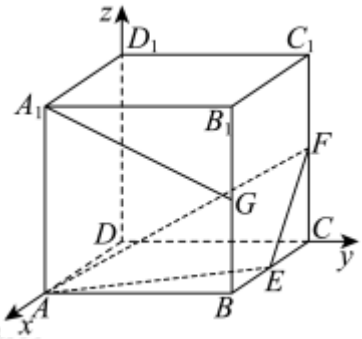
建立空间直角坐标系，利用向量的夹角公式计算A；利用点到直线距离公式计算B；利用线面平行的判定定理判定C；借助C中的线面平行，利用等体积法判定D.

【详解】

在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，建立D以为原点，

以DA，DC，DD_1所在的直线为x轴、y轴、z轴的空间直角坐标系$D-xyz$，

如图所示：



因为E、F、G分别为BC、CC_1、BB_1的中点，

则$D\left(0,0,0\right)$、$D_1\left(0,0,1\right)$、$A\left(1,0,0\right)$、$F\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，

对于A，$A_1(1,0,1)$，$G\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{A_1G}=\left(0,1,-\frac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{DD_1}=(0,0,1)$

设直线A_1G与直线D_1D所成角为θ，

所以

$$\cos\theta=|\cos<\overrightarrow{A_1G},\overrightarrow{DD_1}>|=\frac{\left|\overrightarrow{A_1G}\cdot\overrightarrow{DD_1}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1G}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DD_1}\right|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

故A正确；

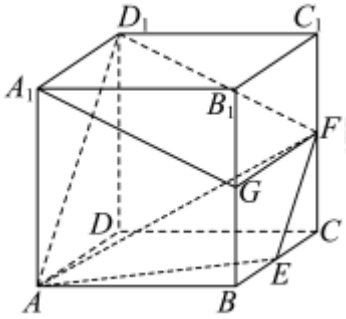
对于B，$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AF}=\left(-1,1,\frac{1}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}$，$|A_1D|=\sqrt{2}$，$|AF|=\frac{3}{2}$

所以$\cos\angle D_1AF=\frac{1.5}{\sqrt{2}\times1.5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以点D_1到AF距离为$d=\sqrt{2}\times\sin\angle D_1AF=1$，故B错误；

对于C，连接AD_1、FD_1，FG，



在正方体中，因为F、G分别为CC_1、BB_1的中点，则$BC_1//EF$，

又易得$AD_1//BC_1$，所以$AD_1//EF$，故A、D_1、E、F四点共面，

又因为$A_1D_1//GF$且$A_1D_1=GF$，所以四边形AD_1FG为平行四边形，

所以$A_1G//D_1F$，又$A_1G\not\subset$平面AEF，$D_1F\subset$平面AEF，

所以$A_1G//$平面AEF，故C正确；

对于D，因为$A_1G//$平面AEF，

$\therefore V_{A_1-AEF}=V_{G-AEF}=V_{A-EFG}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{12}$，故D正确.

故选：ACD

五、填空题

难度

12. 【答案】$\sqrt{2}$

【解析】【分析】由空间数量积的定义求解即可.

【详解】因为$\overrightarrow{a}=(2,2,1)$，$\overrightarrow{b}=(1,-1,\sqrt{2})$，

则$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=2\times1+2\times(-1)+1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

故答案为：$\sqrt{2}$.

难度

13. 【答案】$-\frac{2}{3}$

【解析】【分析】根基两直线垂直可得$m+2(m+1)=0$，从而可得出答案.

【详解】解：因为直线$x+(1+m)y+m-2=0$与直线$mx+2y+8=0$垂直，

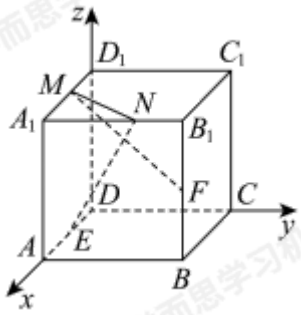
所以$m+2(m+1)=0$，解得$m=-\frac{2}{3}$.

故答案为：$-\frac{2}{3}$.

难度

14. 【答案】$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

【解析】以D为坐标原点，DA，DC，DD_1所在的直线分别为x轴、y轴、z轴，建立空间直角坐标系，如图所示.



因为点E，F分别为棱DA，BB_1的中点，

所以$E(2,0,0)$，$F(4,4,2)$，

设$M(x,0,4)$，$N(4,y,4)$，其中$0<x<4$，$0<y<4$，

则$\overrightarrow{EN}=(2,y,4)$，$\overrightarrow{FM}=(x-4,-4,2)$.因为$\overrightarrow{EN}\perp\overrightarrow{FM}$，

则$\overrightarrow{EN}\cdot\overrightarrow{FM}=(2,y,4)\cdot(x-4,-4,2)=2x-4y=0$，解得$x=2y$，

又因为$0<x<4$，$0<y<4$，则$0<y<2$，

可得

$$MN=\sqrt{(x-4)^2+y^2+(4-4)^2}=\sqrt{(2y-4)^2+y^2}=\sqrt{5\left(y-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16}{5}}$$

，

所以$MN_{\min}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，此时$y=\frac{8}{5}$，

即线段MN的长度的最小值为$\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

六、解答题

难度

15. 【答案】（1）$\frac{1}{3}$

（2）$\frac{5}{6}$

；

【解析】（1）设“甲晋级”为事件A，“乙晋级”为事件B，设“甲、乙两人同时晋级”为事件C，则$P(C)=P(AB)=P(A)P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$；

（2）设“甲、乙两人中至少有一人晋级”为事件D，由题事件A，B相互独立，则$\overline{A}$，$\overline{B}$也相互独立，所以$P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，

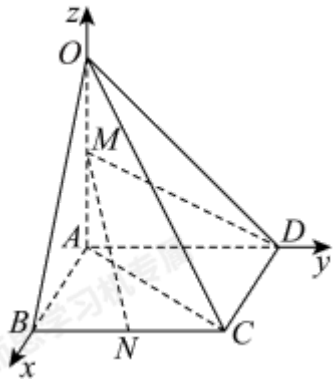
则$P(D)=1-P\left(\overline{D}\right)=1-P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

难度

16. 【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】（1）因为四棱锥$O-ABCD$中，$OA\perp$底面$ABCD$，$AB,AD\subset$底面$ABCD$，且底面$ABCD$是正方形，所以AB,AD,AO两两垂直，以A为原点，AB,AD,AO分别为x,y,z轴建立如图所示坐标系，



则由题意可得$M\left(0,0,1\right)$，$N\left(2,1,0\right)$，$O\left(0,0,2\right)$，$C\left(2,2,0\right)$，$D\left(0,2,0\right)$，

所以$\overrightarrow{MN}=\left(2,1,-1\right)$，$\overrightarrow{OC}=\left(2,2,-2\right)$，$\overrightarrow{OD}=\left(0,2,-2\right)$，

设平面OCD的法向量$\vec{m}=\left(x,y,z\right)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{OC}=2x+2y-2z=0\\\vec{m}\cdot\overrightarrow{OD}=2y-2z=0\end{cases}$，

取$y=1$可得平面OCD的一个法向量$\vec{m}=\left(0,1,1\right)$，

因为$\overrightarrow{MN}\cdot\vec{m}=2\times0+1\times1+\left(-1\right)\times1=0$，

又$MN\not\subset$平面OCD，

所以直线$MN//$平面OCD.

（2）由（1）得$\overrightarrow{NC}=\left(0,1,0\right)$，平面$OCD$的一个法向量$\vec{m}=\left(0,1,1\right)$，

所以点N到平面OCD的距离$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{NC}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\vec{m}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

难度 ★★★☆☆

17. 【答案】（1）$C(6,6)$

（2）存在，$F\left(\dfrac{22}{13},\dfrac{46}{13}\right)$

【解析】（1）因为AC边上的高BE所在的直线方程为$7x+4y-46=0$，

所以$k_{BE}=-\dfrac{7}{4}\Rightarrow k_{AC}=\dfrac{4}{7}$，

又直线AC经过点$A(-1,2)$，

所以直线AC的方程为：$y-2=\dfrac{4}{7}(x+1)$，即：$4x-7y+18=0$.

联立$\begin{cases}2x-11y+54=0\\4x-7y+18=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=6\\y=6\end{cases}$，

即点$C(6,6)$.

（2）由题知，满足条件的点F为点C关于直线BE的对称点，

直线AC的方程为：$y=\frac{4}{7}x+\frac{18}{7}$，设点$F(t,\frac{4}{7}t+\frac{18}{7})$，

所以$E\left(\frac{t+6}{2},\frac{\frac{4}{7}t+\frac{60}{7}}{2}\right)$，

将点E带入直线BE的方程得：$7\times\frac{t+6}{2}+4\times\frac{\frac{4}{7}t+\frac{60}{7}}{2}-46=0$，

解得$t=\frac{22}{13}$，

所以$F\left(\frac{22}{13},\frac{46}{13}\right)$，

即存在点$F\left(\frac{22}{13},\frac{46}{13}\right)$，使得$BC=BF$.

难度 ★★★☆☆

18. 【答案】（1）见解析

（2）$\frac{\sqrt{2}}{3}$

（3）$\frac{PQ}{PC}=\frac{1}{4}$.

【解析】（1）证明：因为$PD=AD=1,CD=2,PC=\sqrt{5},PA=\sqrt{2}$，

所以$PD^2+CD^2=PC^2$，$PD^2+AD^2=PA^2$，所以

$CD\perp PD,AD\perp PD$

又$CD\cap AD=D$，且$CD,AD\subset$平面$ABCD$

所以$PD\perp$平面$ABCD$.

（2）由（1）可知PD,AD,DC两两垂直，以D为原点，以DA,DC,DP所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立如图所示的空间直角坐标系$Dxyz$.

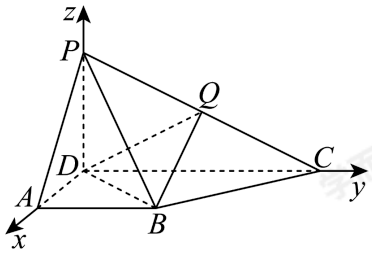
则$D(0,0,0),B(1,1,0),P(0,0,1),C(0,2,0)$，

当点Q为棱PC的中点时，

$Q\left(0,1,\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{PB}=(1,1,-1),\overrightarrow{DB}=(1,1,0),\overrightarrow{DQ}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$

.

设平面BDQ的一个法向量$\overrightarrow{m}=(x_0,y_0,z_0)$，



则$\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{m}=0,\\ \overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{m}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x_0+y_0=0,\\ y_0+\frac{1}{2}z_0=0,\end{cases}$取$\overrightarrow{m}=(1,-1,2)$，

设直线PB与平面BDQ所成角为θ，

则$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{m},\overrightarrow{PB}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{PB}\right|}{\left|\overrightarrow{m}\right|\left|\overrightarrow{PB}\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，

故直线PB与平面BDQ所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

（3）由（2）可知$\overrightarrow{DP}=(0,0,1),\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，

设$\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PC}=(0,2\lambda,-\lambda)(0\le\lambda\le1)$，则

$\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PQ}=(0,2\lambda,1-\lambda)$，

设平面BDQ的一个法向量$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\ \overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x_1+y_1=0,\\ 2\lambda y_1+(1-\lambda)z_1=0,\end{cases}$

令$y_1=1-\lambda$，解得$x_1=\lambda-1,z_1=-2\lambda$，故

$\overrightarrow{n_1}=(\lambda-1,1-\lambda,-2\lambda)$，

设平面BDP的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x_2+y_2=0,\\ z_2=0,\end{cases}$令$y_2=-1$，解得

$x_2=1,z_2=0$，

故$\overrightarrow{n_2}=(1,-1,0)$，

所以$\left|\cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right\rangle\right|=\dfrac{|2\lambda-2|}{\sqrt{6\lambda^2-4\lambda+2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$，

即$\dfrac{|\lambda-1|}{\sqrt{3\lambda^2-2\lambda+1}}=\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$，整理，得$8\lambda^2+2\lambda-1=0$，

解得$\lambda=\dfrac{1}{4}$或$\lambda=-\dfrac{1}{2}$（舍去）.

故$\dfrac{PQ}{PC}=\dfrac{1}{4}$.

难度 ★★★☆☆

19. 【答案】（1）$l_1:y-1=0$，$l_2:2x-y-5=0$

（2）① $x^2+(y+3)^2=25$；

② $(x-4)^2+(y+1)^2=\dfrac{25}{9}$，轨迹是以$(4,-1)$为圆心，半径为$\dfrac{5}{3}$的圆.

【解析】（1）【分析】设线段AB的中点为D，求得直线l_1的方程为$y=1$，由$k_{AB}=-\dfrac{1}{2}$，得到直线l_2的斜率为2，结合直线的点斜式方程，即可求解；

【详解】解：设线段AB的中点为D，则$D(2,1)$，因为$C(3,1)$，则边AB上的中线CD的方程为$y=1$，即直线l_1的方程为$y-1=0$，又因为直线AB的斜率为$k_{AB}=\dfrac{2-0}{0-4}=-\dfrac{1}{2}$，所以$AB$上的高所在直线$l_2$的斜率为$2$，所以$AB$上的高所在直线$l_2$的方程为$y-1=2(x-3)$，即直线$l_2$的方程为$2x-y-5=0$.

（2）① 【分析】(i) 设圆G的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，根据A,B,C三点都在圆上，列出方程组，求得D,E,F的值，即可得到圆的方程；

② 【分析】(ii) 设$M(x,y)$，点$Q(x_0,y_0)$，由$\overrightarrow{PM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$，求得$x_0=3x-12,y_0=3y$，根据$Q$在圆$G$上运动，得到$x_0^2+(y_0+3)^2=25$，代入$(3x-12)^2+(3y+3)^2=25$，即可求解.【详解】设圆$G$的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$（其中$D^2+E^2-4F>0$）因为$A,B,C$三点都在圆上，可得

$$\begin{cases}4D+F+16=0\\2E+F+4=0\\3D+E+F+10=0\end{cases}$$，解得$D=0,E=6,F=-16$，满足$D^2+E^2-4F>0$，所以所求圆G的方程为$x^2+y^2+6y-16=0$，即$x^2+(y+3)^2=25$

【详解】设M的坐标是(x,y)，点Q的坐标是(x_0,y_0)，因为P的坐标是$(6,0)$，且$\overrightarrow{PM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$，所以$(x-6,y)=\dfrac{1}{3}(x_0-6,y_0)$，解得$x_0=3x-12,y_0=3y$，又因为点$Q$在圆$G$上运动，所以点$Q$的坐标

满足圆G的方程，即$x_0^2+(y_0+3)^2=25$，代入得$(3x-12)^2+(3y+3)^2=25$，整理得$(x-4)^2+(y+1)^2=\frac{25}{9}$，点$M$的轨迹方程是$(x-4)^2+(y+1)^2=\frac{25}{9}$，轨迹是以$(4,-1)$为圆心，半径为$\frac{5}{3}$的圆.